

Le verità nascoste
fra numeri e operazioni:



... LA DIVISIONE

Isabella Stevani

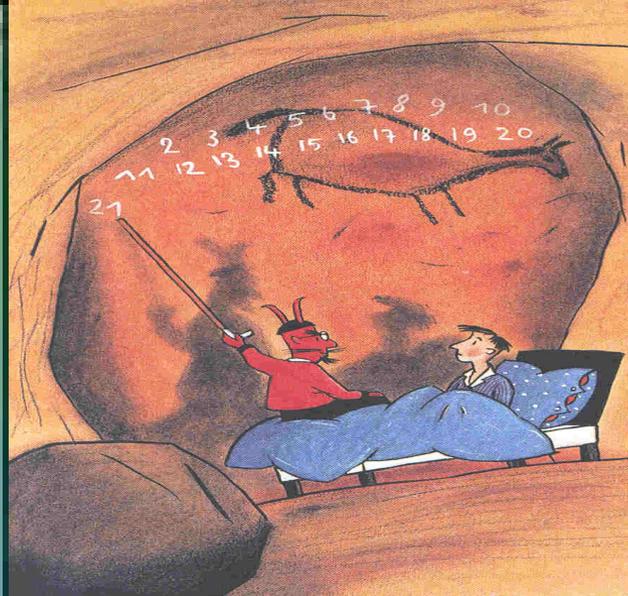
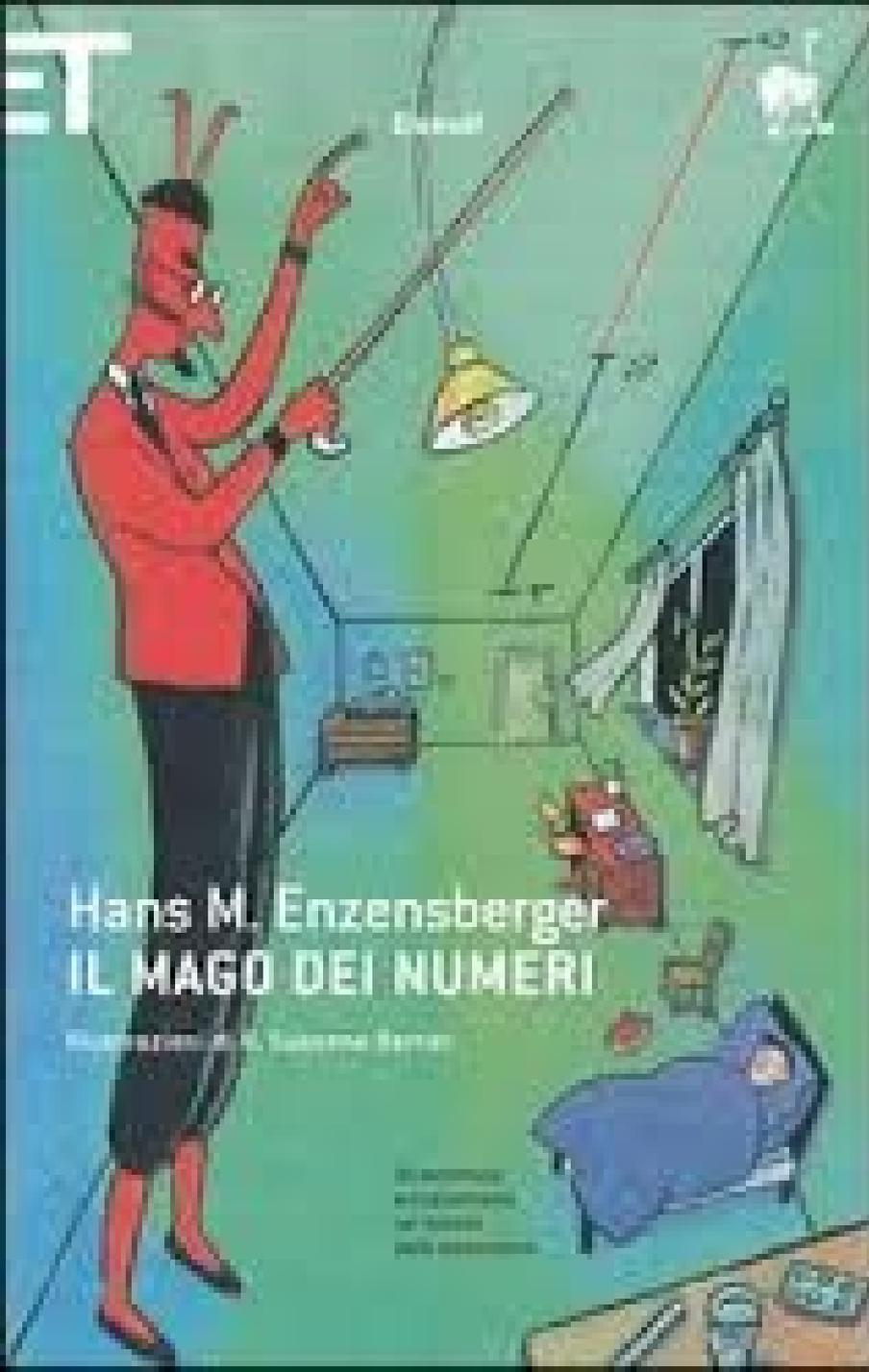
Agorà Matematico

A.S. 2013-2014

SCUOLA PRIMARIA

Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

20 Novembre 2013



TERZA NOTTE



“Dai, Roberto, alzati!

Oggi tocca alle divisioni!

Non ne possiamo fare a meno?

... Le divisioni non le reggo ...

quando si usa il più o il meno, o si moltiplica, i conti tornano sempre.

QUANDO SI DIVIDE INVECE NO.



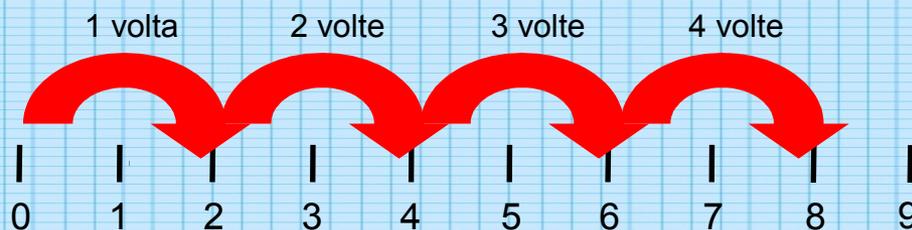


Nell'insieme \mathbb{N} : dai multipli ai divisori

L'operazione di moltiplicazione in \mathbb{N} ci porta alla definizione di multiplo e divisore.

Dati due numeri naturali a e b , con b diverso da zero, si dice che a è **MULTIPLO** di b , se esiste un numero naturale $n \neq 0$ tale che $a = b \cdot n$.

8 è multiplo di 2



Se a è multiplo di b si dice anche che

b è un **DIVISORE** di a e che quindi a è **DIVISIBILE** per b .





“multiplo di ...” relazione d'ordine

L'essere “multiplo di ...” è una **relazione binaria definita in \mathbf{N}** (legge che associa univocamente ad elementi x di \mathbf{N} elementi y di \mathbf{N}) ossia $\mathbf{m: N \longrightarrow N}$

Tale relazione verifica le proprietà:

- | **riflessiva** (a è multiplo di se stesso)
- | **antisimmetrica** (se a è multiplo di b allora b non è multiplo di a ma si dice divisore)
- | **transitiva** (se a è multiplo di b e b è multiplo di c allora a è multiplo di c).

E' quindi una **relazione d'ordine ma non totale**: Dati due numeri naturali qualsiasi non sempre uno dei due è multiplo dell'altro.





“Divisione esatta” ... in \mathbb{N}

Dati due numeri naturali a e b , con $b \neq 0$,
il numero $c = a : b$, se esiste, è il numero che, moltiplicato per
 b , è uguale ad a :

$$a : b = c \quad \text{se e solo se} \quad c \cdot b = a$$

L'operazione definita si chiama **DIVISIONE**.

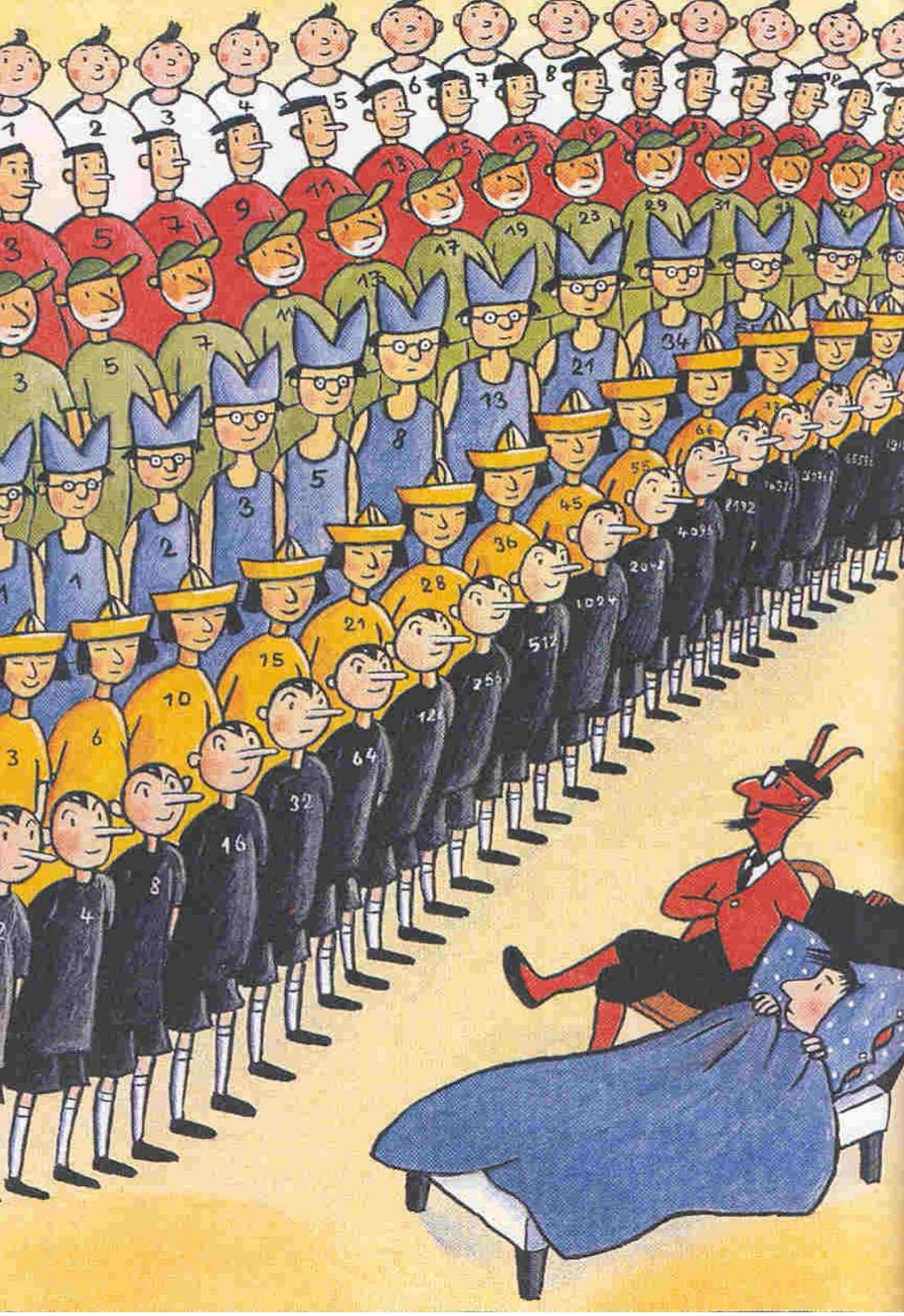
$$\begin{array}{ccc} a : b = c & & \\ \uparrow & \uparrow & \\ \text{dividendo} & \text{divisore} & \text{quoto} \end{array}$$

Il numero c può non esistere, per esempio:

$15 : 4 = ?$ Perché non esiste un numero naturale che, moltiplicato
per 4, dia come prodotto 15.

L'esistenza di c è garantita solo se a è multiplo di b , da cui deriva
che la divisione non è un'operazione interna a \mathbb{N} .





Il Mago dei numeri

H. MAGNUS ENZENSBERGER

Quando si divide ... spesso c'è qualche resto che mi dà un fastidio tremendo (disse Roberto)

... a certi numeri gli si legge in faccia che si possono dividere senza resto ... con i numeri pari fila tutto liscio se si dividono per due.

E' facile dividere anche i numeri della tabellina del tre e via dicendo....

E' come quando si moltiplica solo al contrario ...





“ Ma ... dividere per zero è assolutamente vietato.”
(disse il mago ...)

“ Se lo facessi? ”
(disse Roberto)



“Salterebbe in aria tutta la matematica!!!
Prova a riflettere.

Che risultato avresti, dividendo 19 per 0?

Diciamo che ... $19 : 0$ fa 190 e ... all'incontrario?
 190×0 ... è ... zero ... zero ... visto?

E questo vuol dire che non puoi dividere un numero per zero perché il risultato è sempre sballato.”





Le proprietà della divisione esatta

La divisione a differenza della moltiplicazione non gode né della proprietà commutativa, né di quella associativa.

La divisione gode delle seguenti proprietà:

- ♦ **proprietà invariante**: il quoziente tra due numeri a e b non cambia se entrambi vengono moltiplicati o divisi per uno stesso numero non nullo.

$$a : b = (a : h) : (b : h)$$

$$180 : 45 = (180 : 9) : (45 : 9) = 20 : 5 = 4$$

- ♦ **proprietà distributiva (solo a sinistra)** della divisione rispetto all'addizione e alla sottrazione (se queste operazioni sono possibili in N):

$$(a \pm b) : c = (a : c) \pm (b : c)$$

$$(15 + 20) : 5 = (15 : 5) + (20 : 5) = 3 + 4 = 7$$

La divisione **non è però distributiva a destra**, per esempio:

$$60 : (12 + 3) \quad 60 : 15 = 4 \quad \text{non è uguale a} \quad (60 : 12) + (60 : 3) \quad 5 + 20 = 25$$





Riassumendo ...

Operazioni

MOLTIPLICAZIONE $a \cdot b$
(interna)

DIVISIONE ESATTA $a : b$
(con $b \neq 0$ e a multiplo di b)

Proprietà

commutativa

$$a \cdot b = b \cdot a$$

associativa

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

distributiva

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

elemento neutro

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

elemento assorbente

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

legge di annullamento del prodotto

$$\text{se } a \cdot b = 0 \quad a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0 \quad \text{o} \quad a = b = 0$$

invariantiva

$$a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$$

$$a : b = (a : c) : (b : c)$$

distributiva

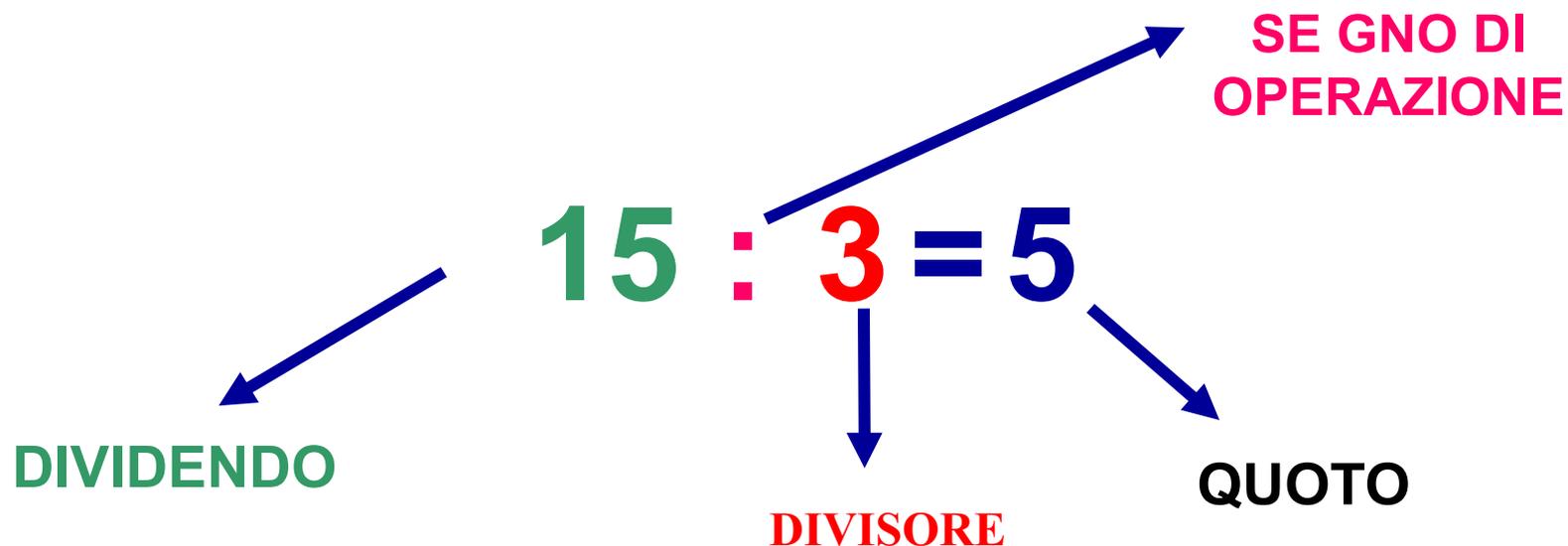
$$(a + b) : c = a : c + b : c$$

$$(a - b) : c = a : c - b : c$$





Dalla divisione ai divisori ...



3 È DIVISORE DI **15** PERCHÉ LA DIVISIONE È ESATTA (**IL RESTO È ZERO**).

MA QUALI SONO GLI ALTRI DIVISORI DI **15**?

$$D(15) = \{1; 3; 5; 15\}$$

I DIVISORI DI UN NUMERO SONO SEMPRE UN NUMERO FINITO

A DIFFERENZA DEI MULTIPLI CHE SONO INFINITI.



La tabella della divisione

÷	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		1									
2		2	1								
3		3		1							
4		4	2		1						
5		5				1					
6		6	3	2			1				
7		7						1			
8		8	4		2				1		
9		9		3						1	
10		10	5			2					1

Si chiamano **divisori** di un numero quelli che lo dividono esattamente, senza resto.

I divisori di 2 sono: 1 e 2

I divisori di 3 sono: 1 e 3

I divisori di 4 sono: 1, 2 e 4

I divisori di 5 sono: 1 e 5

I divisori di 6 sono: 1, 2, 3 e 6

I divisori di 7 sono: 1 e 7

I divisori di 8 sono: 1, 2, 4 e 8

I divisori di 9 sono: 1, 3 e 9

I divisori di 10 sono: 1, 2, 5 e 10



I criteri di divisibilità ...

CRITERIO DIVISIBILITÀ PER DUE

UN NUMERO È DIVISIBILE PER DUE SE L'ULTIMA CIFRA A DESTRA (UNITÀ) È:

0 oppure **2** oppure **4** oppure **6** oppure **8**

CIOÈ È PARI





I criteri di divisibilità ...

CRITERIO DIVISIBILITÀ PER TRE

UN NUMERO È DIVISIBILE PER TRE SE LA SOMMA DELLE SUE CIFRE È UN MULTIPLO DI TRE.

SE LA SOMMA NON È MOLTO GRANDE STA NELLA TABELLINA DEL TRE

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
----------	----------	----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------





I criteri di divisibilità ...

CRITERIO DIVISIBILITÀ PER CINQUE

UN NUMERO È DIVISIBILE PER CINQUE SE L'ULTIMA CIFRA A DESTRA (UNITÀ) È:

0 oppure **5**



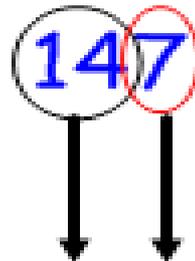


I criteri di divisibilità ...

CRITERIO DIVISIBILITÀ PER SETTE

UN NUMERO È DIVISIBILE PER SETTE SE la differenza fra l'intero numero, letto senza la cifra delle unità, e il doppio dell'unità stessa, è 0 o un multiplo di 7

Ad esempio:



$$14 - 7 \times 2$$

$$14 - 14 = 0$$





I criteri di divisibilità ...

CRITERIO DIVISIBILITÀ PER UNDICI

UN NUMERO È DIVISIBILE PER UNDICI SE la differenza (in valore assoluto) tra la somma delle sue cifre che occupano posto pari e la somma delle cifre che occupano posto dispari dà come risultato zero o un numero DIVIBILE per 11

Ad esempio:

$$\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ + \\ 1221 \\ \swarrow \quad \searrow \\ + \\ 3 \\ 3 - 3 = 0 \end{array}$$



I criteri di divisibilità ...

CRITERIO DIVISIBILITÀ PER DIECI, CENTO, MILLE, ...

UN NUMERO È DIVISIBILE PER **DIECI** SE
L'ULTIMA CIFRA A DESTRA È **0**

UN NUMERO È DIVISIBILE PER **CENTO** SE LE
ULTIME DUE CIFRE A DESTRA SONO **00**

UN NUMERO È DIVISIBILE PER **MILLE** SE LE
ULTIME DUE CIFRE A DESTRA SONO **000**
...





I perchè dei criteri di divisibilità

Divisibilità per 2

Se si scrive un numero in notazione posizionale
ad es. 240 si può scrivere $2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 0 \cdot 1$

ossia generalizzando

$100a + 10b + c$ se poi si raccoglie $2(50a + 5b) + c$ si nota che la
divisibilità per 2 è legata all'ultima cifra (c).

Divisibilità 3 o 9

Analogamente si scrive in notazione posizionale il numero e si toglie
un'unità alle centinaia, alle decine e alle unità si ha la seguente
scrittura: $100a + 10b + c = 99a + 9b + (c + a + b)$

da cui si deduce che

un numero è divisibile per 3 o 9 se la somma delle sue cifre ($a + b + c$) è
divisibile per 3 o 9.



I perchè dei criteri di divisibilità

Divisibilità per 4

Se si scrive un numero in notazione posizionale $100a + 10b + c$ si ha che il primo termine è sempre divisibile per 4 poiché lo è 100 quindi la divisibilità dipende dalle ultime due cifre e in particolare si ha la divisibilità per 4 se la sua penultima cifra è dispari e l'ultima 2 o 6 oppure se la penultima è pari (o 0) e l'ultima 0,4,8.

Divisibilità per 5

Si scrive in notazione posizionale il numero $100a + 10b + c$ e poiché 100 e 10 sono multipli di 5 è solo c che deve essere 0 o 5

Divisibilità per



“...e con il 19 cosa ci faccio?”

Devi sapere che esistono quei banalissimi numeri che si possono dividere

... e poi gli altri invece dove non si può.
Io preferisco questi e sai perché?

Perché... sono dei principi.

I matematici ci si rompono la testa da più di mille anni.

... Sono numeri meravigliosi”





Numeri primi e composti

Si dice *primo* un numero naturale p , maggiore di 1, che non ammette divisori diversi da se stesso e da 1

A esempio sono numeri *primi* 2, 3, 5, 7, 11, ...

12 è, invece, *composto* (divisibile per 1, 2, 3, 4, 6, 12)

TEOREMA DI EUCLIDE: Esistono infiniti numeri primi

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA: Ogni numero intero $n > 1$ può essere scomposto in modo UNICO, a meno dell'ordine, in un prodotto di primi

Ci si chiede perché uno è escluso?





Osservazioni ...

Il teorema di Euclide è elegante ma non costruttivo

Numeri primi \rightarrow infiniti

ma come sono “fatti”?

Non si è trovata una formula semplice che fornisca **solo** numeri primi e neppure una formula che fornisca **tutti** i numeri primi

Ci si chiede anche ... come sono distribuiti?

Se A_n è l'insieme dei numeri primi in $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

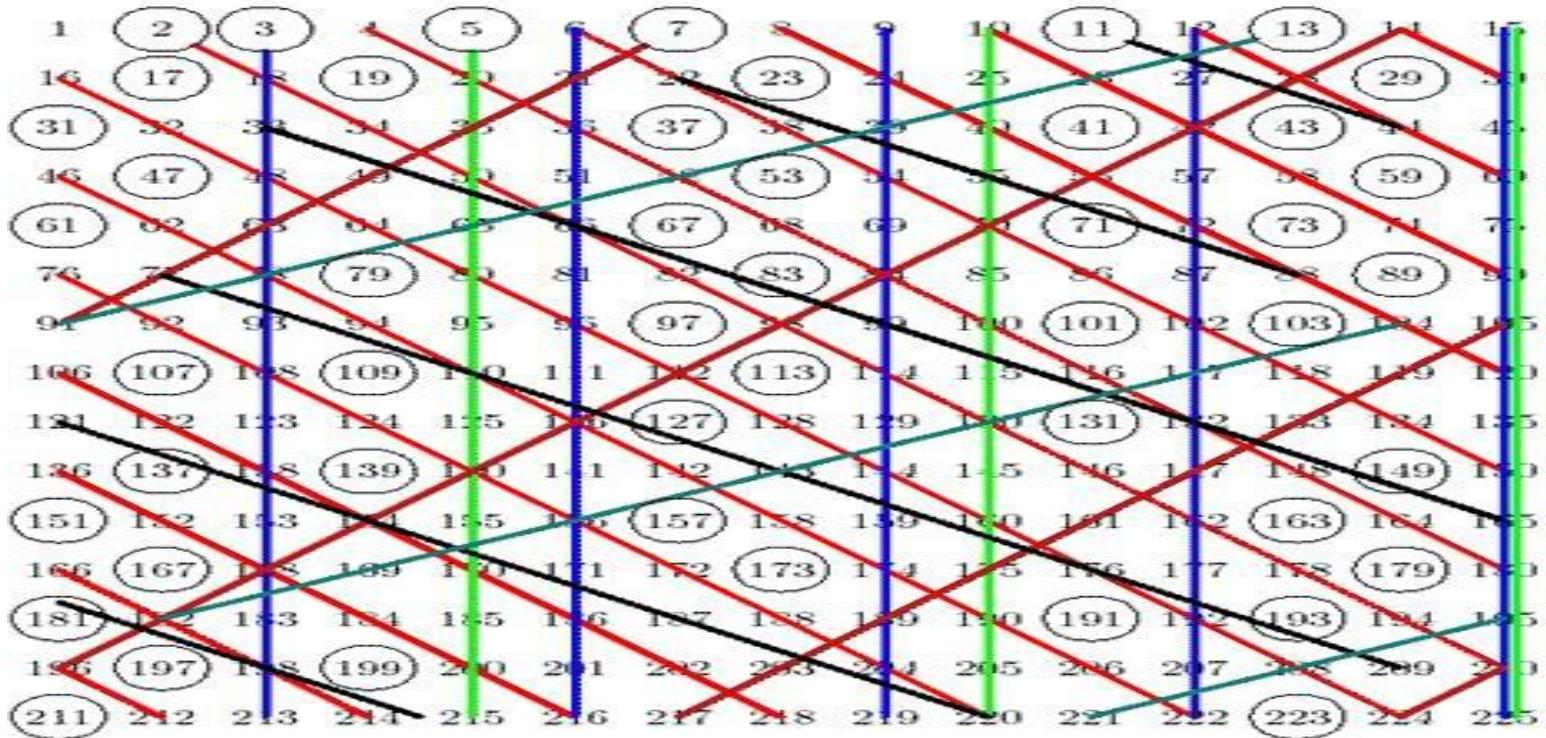
Con i contributi di Gauss, Hadamard, Poussin ... si è scoperto che la distribuzione è del tipo:

$$A_n/n \sim 1/\ln(n)$$





I numeri primi e il crivello di Eratostene



Si può far notare ai ragazzi che anche se non esiste una formula matematica per determinare tutti i numeri primi, esiste però un metodo empirico per trovarli. Si introduce così il **crivello di Eratostene** risalente al III sec. a.C..



Questioni aperte e curiosità ...

Numeri gemelli

Due numeri primi p_1 e p_2 si dicono **gemelli** se $p_2 - p_1 = 2$

Esempi: 11, 13; 17, 19; 41, 43 ...

Non si sa se i primi gemelli siano infiniti.

Congettura di Goldbach

Ogni numero pari > 2 è somma di due numeri primi

Esempi:

$$14 = 7 + 7$$

$$24 = 11 + 13$$

$$42 = 5 + 37 = 11 + 31 = 13 + 29 = 19 + 23$$

Tuttora non dimostrata!

... Funziona anche con i dispari ...

Ogni numero dispari > 5 è somma di tre numeri primi





Casi Particolari

“... e adesso mio caro dimmi quali sono i primi numeri principi ... lo zero rispose Roberto per farlo arrabbiare. Lo zero non vale gridò il vecchio ... allora l'uno. Non vale neanche l'uno. Quante volte devo dirtelo! ...”



CI SONO DUE NUMERI CHE
NON SONO NÉ PRIMI NÉ COMPOSTI E SONO:

0 e **1**



Minimo comune multiplo

Dati due, o più, numeri naturali, diversi da zero, si chiama loro **minimo comune multiplo (mcm)**, il più piccolo fra i loro multipli comuni.

$$M(8)=\{8; 16; 24; 32; 40; 48; \dots\}$$

$$M(12)=\{12; 24; 48; 60; 72; 84; \dots\}$$

$$\text{mcm}(8;12)= 24$$

Scomposizione in fattori primi e minimo comune multiplo

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Si moltiplicano i Fattori comuni e non comuni, una volta sola, con il max esponente:

$$2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$$

60	2	↖
30	2	↖
15	3	↖
5	5	
1		



per trovare il **minimo comune multiplo** tra due o più numeri si devono scomporre i numeri in fattori primi e si moltiplicano fra loro i **fattori comuni e non comuni** presi una sola volta e con l'esponente più grande

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$\text{m.c.m.} = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$$





Massimo comun divisore

Dati due, o più, numeri naturali, diversi da zero, si chiama loro loro **massimo comune divisore (MCD)** il più grande numero che divide esattamente tutti i numeri dati.

$$D(24)=\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$$

$$D(30)=\{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$$

$$MCD(24;30)= 6$$



Scomposizione in fattori primi e minimo comune multiplo

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Si moltiplicano i Fattori comuni e non comuni, una volta sola, con il max esponente:

$$2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$$

60	2	↩
30	2	↩
16	3	↩
5	5	
1		





per trovare il **minimo comune multiplo** tra due o più numeri si devono scomporre i numeri in fattori primi e si moltiplicano fra loro i **fattori comuni e non comuni** presi una sola volta e con l'esponente più grande

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$\text{m.c.m.} = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$$



MASSIMO COMUNE DIVISORE (MCD)

Dati due, o più, numeri naturali, diversi da zero, si chiama loro loro **massimo comune divisore (MCD)** il più grande numero che divide esattamente tutti i numeri dati.

$$D(24)=\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$$

$$D(30)=\{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$$

$$MCD(24;30)= 6$$



Scomposizione in fattori primi e massimo comune divisore

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Si moltiplicano solo i Fattori comuni con l'esponente più piccolo:

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

$$\text{M.C.D.} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

60	2
30	2
16	3
5	5
1	



per trovare il **massimo comune divisore** tra due o più numeri si devono scomporre i numeri in fattori primi e si moltiplicano fra loro **i fattori comuni** presi una sola volta e con l'esponente più piccolo

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$\text{M.C.D.} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

se i numeri non hanno fattori in comune il M.C.D. è 1



Numeri “primi” fra loro

$$D(16)=\{1; 2; 4; 8; 16\}$$

$$D(33)=\{1; 3; 11; 33\}$$

$$\text{MCD}(16;33)= 1$$

Se due, o più, numeri naturali, diversi da zero, che hanno MCD uguale a 1 si dicono “**PRIMI**” fra loro.



Divisione con il resto

Qualunque siano i numeri naturali a e b , con $b \neq 0$, si può dimostrare che esistono e sono unici due naturali q e r tali che:

$$a = b \cdot q + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < b$$

Il numero q si dice **quoziente intero** di $a : b$, il numero r è il **resto** di tale divisione.

Invece scrivere $a : b = q + r$ NON E' CORRETTO

Come spiega la prof.ssa Ana Gasca, coautrice del libro "Pensare la matematica" nel video al seguente indirizzo

http://www.youtube.com/watch?v=aR4_3e18yPM&feature=player_embedded

ESEMPI

nella divisione $25 : 4$, si ha che $q = 6$ e $r = 1$ perché $25 = 4 \cdot 6 + 1$

nella divisione $314 : 23$, si ha che $q = 13$ e $r = 15$ perché $314 = 23 \cdot 13 + 15$





Da N a Q^+ ... le frazioni

Vogliamo ampliare l'insieme numerico N con un insieme numerico nel quale sia sempre possibile eseguire la divisione .

Per fare ciò dobbiamo introdurre il **concetto di frazione**.

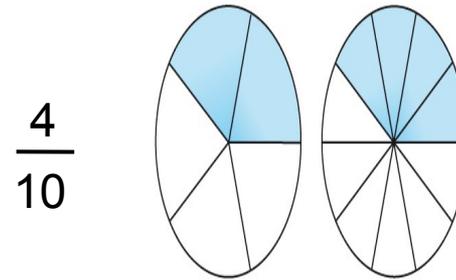
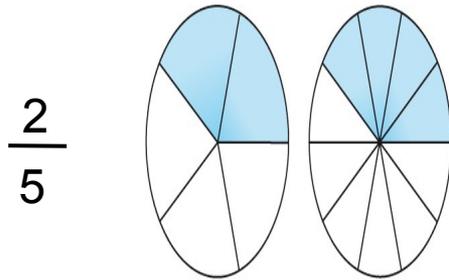
- Una **frazione** è un elemento del prodotto cartesiano $N \times N \setminus \{0\}$, cioè è una coppia ordinata (a, b) con $b \neq 0$
- Stabiliamo la corrispondenza $(a, b) \longrightarrow a/b$

$\frac{a}{b}$ indica il risultato della divisione tra a e b se $b \neq 0$



Frazioni equivalenti

Esistono frazioni diverse che esprimono la stessa quantità come ad esempio:



Diremo allora che:

La frazione $\frac{a}{b}$ è equivalente alla frazione $\frac{c}{d}$ se

$$a \cdot d = b \cdot c$$

ESEMPIO

$$\frac{3}{7} \times \frac{6}{14}$$

Prodotto incrociato



L'insieme dei numeri razionali Q_a

L'insieme delle frazioni può essere quindi suddiviso in tanti sottoinsiemi, ciascuno dei quali contiene tutte e sole le frazioni equivalenti tra loro; chiameremo questi sottoinsiemi *gruppi di equivalenza*.

Si chiama **numero razionale assoluto** ogni **sottoinsieme costituito da di frazioni equivalenti**.

La scelta della frazione rappresentante è arbitraria ma generalmente è comodo scegliere quella ridotta ai **minimi termini**, cioè la frazione in cui il *M.C.D.* fra il numeratore e il denominatore è uguale a 1.

Per ridurre una frazione ai minimi termini si applica la proprietà invariante della divisione:

ESEMPIO

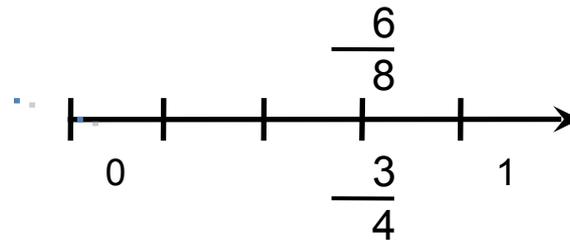
$$\frac{15}{24} = \frac{15 : 3}{24 : 3} = \frac{5}{8}$$

L'insieme dei numeri razionali assoluti viene indicato con Q_a



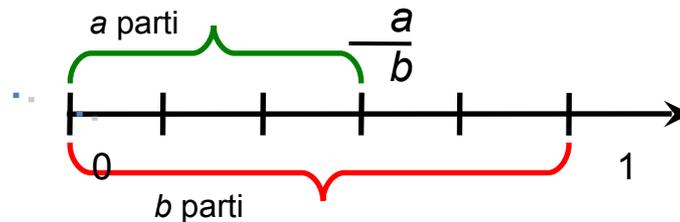
Rappresentazione sulla retta

Anche l'insieme Q_a può essere rappresentato su una semiretta orientata. Fissato un segmento a cui far corrispondere il numero razionale 1, per individuare il punto a cui corrisponde, per esempio, il numero $\frac{3}{4}$, basta dividere il segmento unitario in 4 parti uguali e considerare il multiplo secondo 3 di una di queste parti.



Il punto che rappresenta la frazione $\frac{3}{4}$ rappresenta anche tutte le frazioni equivalenti ($-\frac{6}{8}, -\frac{9}{12} \dots$)

In generale, al numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{a}{b}$ si fa corrispondere il punto che si ottiene dividendo il segmento unitario in b parti uguali e considerando il multiplo secondo a di una di queste parti.





Dai numeri frazionari ai decimali

Oltre che in forma di frazione, un numero razionale si può rappresentare anche con una scrittura decimale.

Per trasformare una frazione in un numero decimale basta dividere il numeratore per il denominatore.

Il numero decimale può essere:

· **finito:** $\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0,6$

· **periodico semplice:** $\frac{14}{3} = 14 : 3 = 4,6666\dots = 4,\overline{6}$

· **periodico misto:** $\frac{26}{15} = 1,7333\dots = 1,7\overline{3}$ *periodo*

antiperiodo





Dalle frazioni ai decimali finiti

Enunciamo il seguente criterio:

- una frazione che, ridotta ai minimi termini, ha per denominatore un numero la cui scomposizione contiene solo potenze del 2 e/o del 5, dà origine ad un numero decimale finito;
- una frazione che, ridotta ai minimi termini, ha per denominatore un numero la cui scomposizione contiene almeno un fattore diverso da 2 e da 5, dà origine ad un numero decimale periodico.

ESEMPI

$$\frac{\cancel{12}^3}{\cancel{16}_4}$$

numero decimale finito

$$\frac{7}{3}$$

numero decimale periodico



Dai decimali alle frazioni generatrici

La **frazione generatrice** di un numero decimale finito si ottiene scrivendo al numeratore le cifre del numero senza la virgola e al denominatore 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali.

ESEMPIO

$$7,5 = \frac{75}{10} = \frac{15}{2}$$

La **frazione generatrice** di un numero decimale periodico è una frazione che ha per numeratore la differenza tra il numero intero che si ottiene togliendo la virgola ed il numero intero che si ottiene eliminando le cifre del periodo, e per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

ESEMPI

$$2,\overline{24} = \frac{224 - 2}{99} = \frac{222}{99} = \frac{74}{33}$$

$$1,\overline{73} = \frac{173 - 17}{90} = \frac{156}{90} = \frac{26}{15}$$



Ordinamento delle frazioni

Vogliamo confrontare due frazioni:

- Se due frazioni hanno uguale denominatore, la frazione maggiore è quella con il numeratore maggiore.

ESEMPIO

$$\frac{11}{13} > \frac{7}{13}$$

- Se due frazioni hanno denominatori diversi basta ridurre allo stesso denominatore e poi confrontare i numeratori.

ESEMPIO

$$\frac{5}{2} > \frac{4}{7}$$

Infatti, riducendole a denominatore comune $14 = \text{m.c.m.}(2, 7)$ $\frac{35}{14} > \frac{8}{14}$

Per confrontare due numeri razionali assoluti basta confrontare due frazioni rappresentanti o le loro forme decimali.





Addizione/sottrazione di frazioni

· ADDIZIONE

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Se b e d hanno divisori comuni il denominatore comune è il *m.c.m.* di essi.

ESEMPIO

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9 + 2}{12} = \frac{11}{12}$$

· SOTTRAZIONE

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$$\text{con } \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$$

ESEMPIO

$$\frac{7}{3} - \frac{1}{6} = \frac{14 - 1}{6} = \frac{13}{6}$$



Moltiplicazione /divisione di frazioni

MOLTIPLICAZIONE

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

ESEMPIO

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3} \cdot \frac{5}{\cancel{8}_4} = \frac{5}{12}$$

DIVISIONE

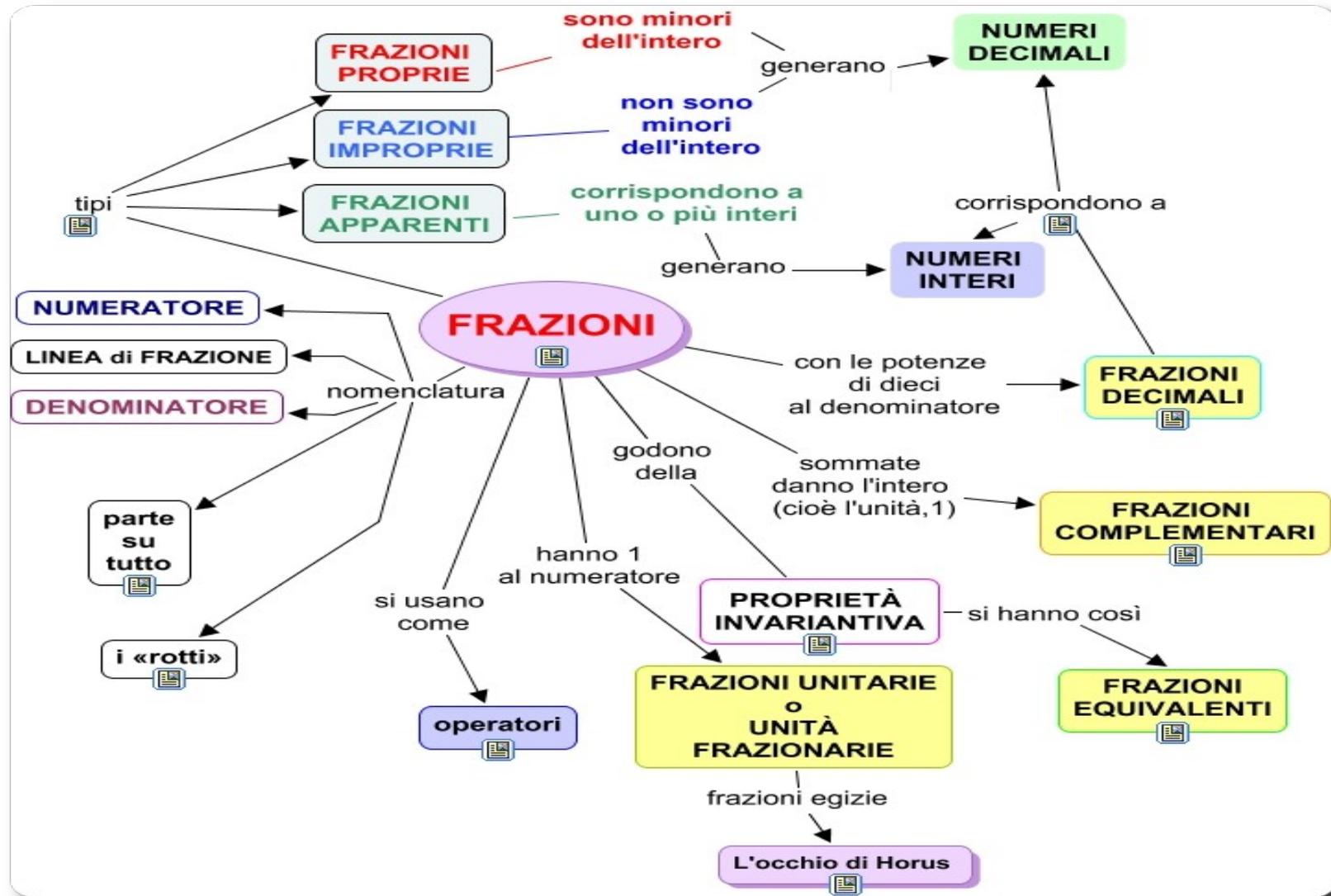
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad \frac{d}{c} \text{ reciproco di } \frac{c}{d} \quad \text{con } c \neq 0$$

ESEMPIO

$$\frac{4}{5} : \frac{8}{3} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{5} \cdot \frac{3}{\cancel{8}_2} = \frac{3}{10}$$



Le frazioni in sintesi



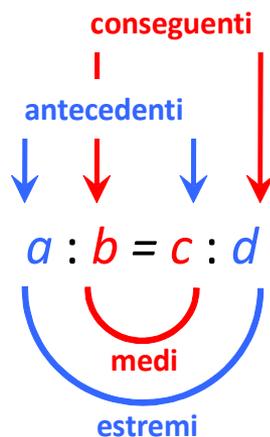


Rapporti e proporzioni

Si dice **rapporto** fra due numeri a e b , con $b \neq 0$, il quoziente della loro divisione.

Si dice che quattro numeri a , b , c , d , sono in **proporzione** se il rapporto fra i primi due numeri è uguale al rapporto fra i secondi due:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{con } b \neq 0 \text{ e } d \neq 0$$





Proprietà delle proporzioni

Proprietà delle proporzioni

- **Proprietà fondamentale:** il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

$$\begin{array}{c} a \cdot d \\ \text{---} \\ a : b = c : d \\ \text{---} \\ b \cdot c \end{array} \longrightarrow b \cdot c = a \cdot d$$

- **Proprietà del permutare:** scambiando fra loro i medi, oppure gli estremi, la relazione che si ottiene è ancora una proporzione.

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ a : b = c : d \\ \text{---} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a : c = b : d \\ d : b = c : a \end{array}$$



Proprietà delle proporzioni

- **Proprietà dell'invertire:** scambiando ogni antecedente con il proprio conseguente, la relazione che si ottiene è ancora una proporzione.

$$a : b = c : d \longrightarrow b : a = d : c$$

Diagram showing blue arcs under 'a' and 'b' in the first ratio, and under 'c' and 'd' in the second ratio, indicating the swap of antecedents and consequents.

- **Proprietà del comporre:** in ogni proporzione, la somma dei primi due termini sta al primo (o al secondo) come la somma del terzo e del quarto termine sta al terzo (o al quarto).

$$a : b = c : d \longrightarrow \begin{aligned} (a + b) : a &= (c + d) : c \\ (a + b) : b &= (c + d) : d \end{aligned}$$

Diagram showing blue arcs under 'a' and 'b' in the first ratio, and under 'c' and 'd' in the second ratio, indicating the addition of terms. Below the first ratio, the text "si sommano" is written in blue.

- **Proprietà dello scomporre:** in ogni proporzione, la differenza dei primi due termini sta al primo (o al secondo) come la differenza del terzo e del quarto termine sta al terzo (o al quarto).

$$a : b = c : d \longrightarrow \begin{aligned} (a - b) : a &= (c - d) : c && \text{se } a > b \text{ e } c > d \\ (a - b) : b &= (c - d) : d \end{aligned}$$

Diagram showing blue arcs under 'a' and 'b' in the first ratio, and under 'c' and 'd' in the second ratio, indicating the subtraction of terms. Below the first ratio, the text "si sottraggono" is written in blue.





Tabella di riepilogo delle operazioni negli insiemi numerici

OPERAZIONE	CARATTERISTICHE E PROPRIETÀ
Addizione	<ul style="list-style-type: none">· è un'operazione interna a qualsiasi insieme numerico· è commutativa e associativa· ha elemento neutro: 0· è invertibile in Z e Q e l'operazione inversa è la sottrazione
Sottrazione	<ul style="list-style-type: none">· è un'operazione interna a Z e Q, non sempre è possibile in N e Q_0· possiede la proprietà invariantiva
Moltiplicazione	<ul style="list-style-type: none">· è un'operazione interna a qualsiasi insieme numerico· è commutativa e associativa· è distributiva rispetto all'addizione e alla sottrazione· ha elemento neutro: 1· è invertibile in Q_0 e l'operazione inversa è la divisione
Divisione	<ul style="list-style-type: none">· è un'operazione interna a Q, non sempre è possibile in N e Z· possiede la proprietà invariantiva· è distributiva solo a sinistra rispetto all'addizione e alla sottrazione



Dai numeri razionali ai reali

- **Numeri reali irrazionali:** numeri decimali illimitati non periodici

L'insieme dei numeri razionali e quello dei numeri irrazionali sono disgiunti e la loro unione dà origine all'insieme dei **numeri reali**. Un numero reale è quindi un numero che è razionale o irrazionale.

L'insieme dei numeri reali si indica con R .

L'insieme R può essere rappresentato su una retta orientata ed esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di tale retta e i numeri reali.





DISCRETO



CONTINUO ?

Questo è il problema.



IL SIGNOR Q un uomo più
che *discreto* e ...
densamente razionale,
pazientemente cerca ...



Io dico che il
punto c'è.
Non lo vedo
ma ci credo!!!

MISTER 

un tipo che
di discreto non ha nulla
ed è tutt'altro che razionale

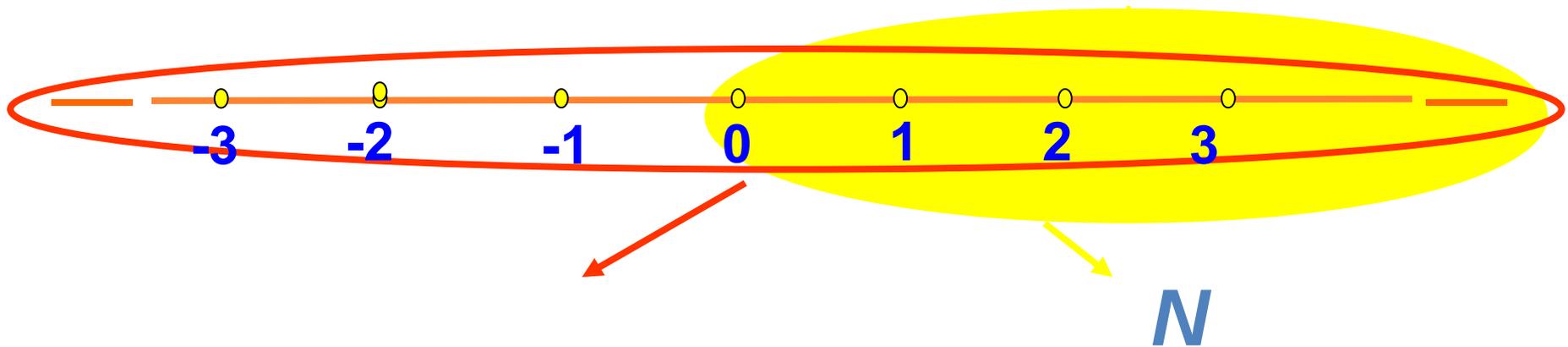


Che cerchi pure,
io non sono
previsto, dovrò
inventarmi



DISCRETO: L'INSIEME DEI NATURALI e anche l'insieme degli INTERI

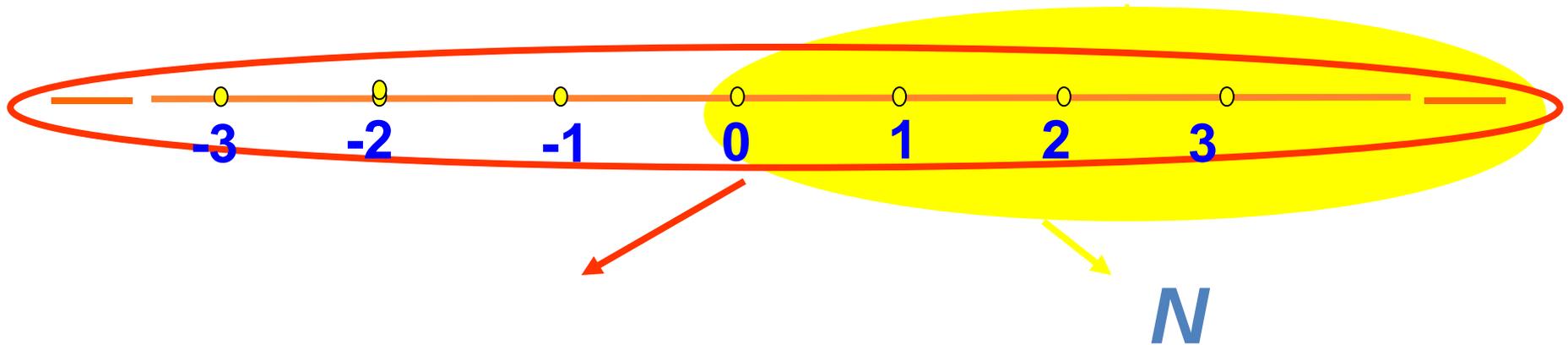
tra un numero e il successivo non esistono altri numeri





DISCRETO: L'INSIEME DEI NATURALI e anche l'insieme degli INTERI

tra un numero e il successivo non esistono altri numeri





l'insieme dei numeri naturali \mathbb{N}

(e dei numeri interi \mathbb{Z})

ha la potenza del numerabile: \aleph_0



È SORPRENDENTE!

Q È NUMERABILE

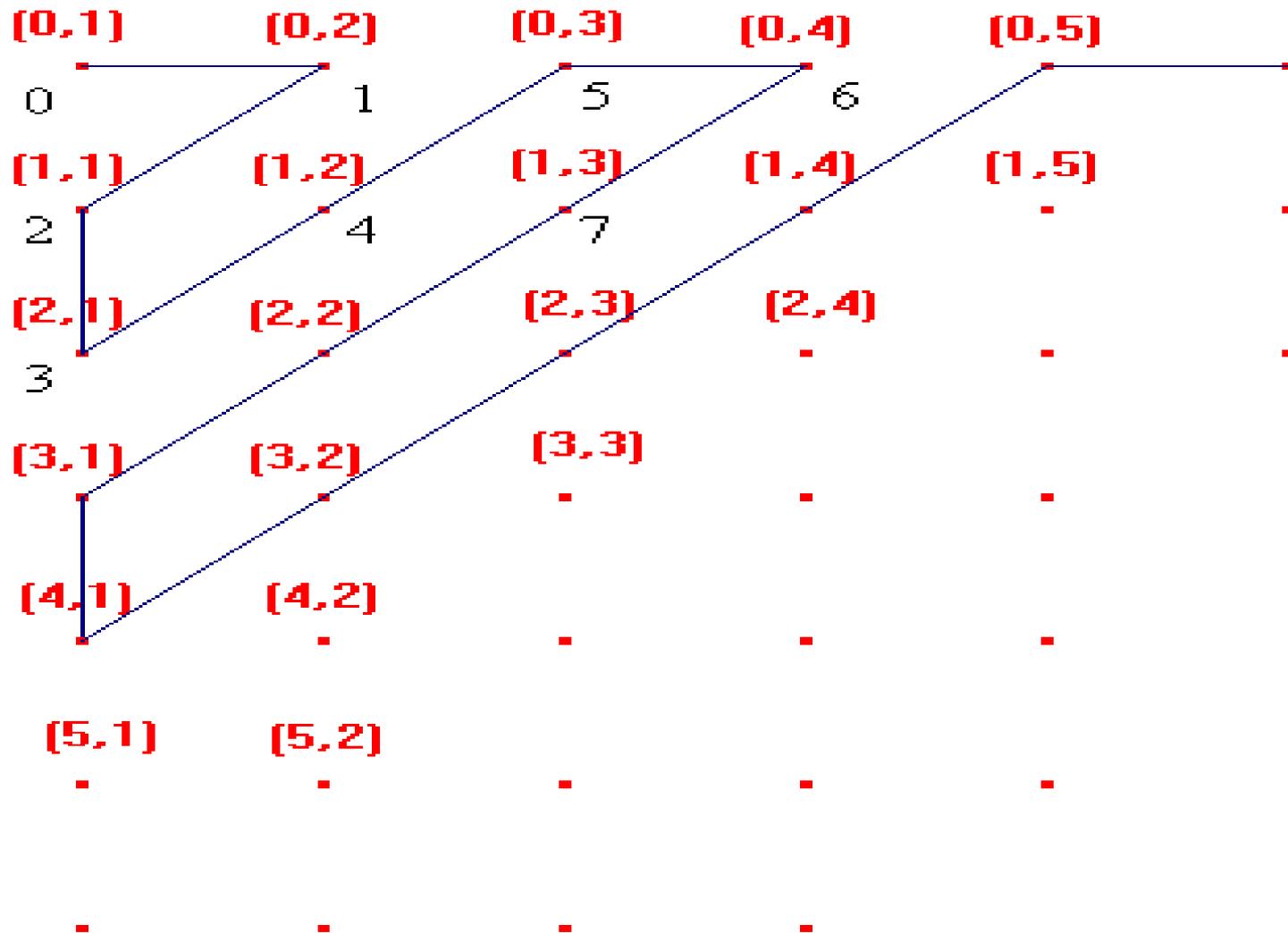
HA CARDINALITÀ \aleph_0

**CIOÈ I NUMERI RAZIONALI SONO TANTI QUANTI I
NUMERI NATURALI !!!**

**CIOÈ È POSSIBILE METTERE IN CORRISPONDENZA
BIUNIVOCA, UNO A UNO, I NUMERI NATURALI E I
NUMERI RAZIONALI, COME SEGUE:**



"metodo diagonale" di Cantor





N

1

2

3

4

...



$2N$

2

4

6

8

...



Q

$1/1$

$1/2$

$2/1$

$3/1$

...



La numerabilità dei razionali

Il fatto che la cardinalità dei razionali sia la stessa degli interi è abbastanza sorprendente,

in quanto si è passati da un insieme "discreto", cioè con punti staccati uno dall'altro,

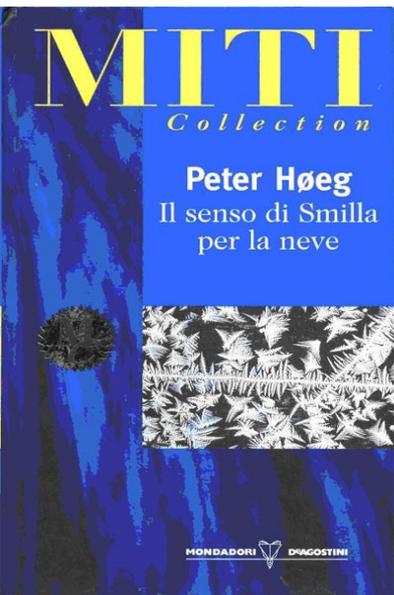
ad un insieme denso, cioè con la caratteristica che tra due numeri qualunque ce ne sono sempre infiniti.



L'ipotesi del continuo

Cantor ipotizzò che non esistesse nessun insieme con una cardinalità intermedia compresa fra quella di \mathbb{N} e quella di \mathbb{R} (ipotesi del continuo).

Così come i numeri naturali rappresentano il primo livello di infinito, i numeri reali rappresenterebbero, secondo tale ipotesi, il livello immediatamente successivo.



“Sai cosa c'è alla base della matematica?» dico. «Alla base della matematica ci sono i numeri. Se qualcuno mi chiedesse che cosa mi rende davvero felice, io risponderei: i numeri. La neve, il ghiaccio e i numeri. E sai perché?»

«Perché il sistema numerico è come la vita umana. Per cominciare ci sono i numeri naturali. Sono quelli interi e positivi. I numeri del bambino. Ma la coscienza umana si espande. Il bambino scopre il desiderio, e sai qual è l'espressione matematica del desiderio?»

«Sono i numeri negativi. Quelli con cui si dà forma all'impressione che manchi qualcosa. **Ma la coscienza si espande ancora, e cresce, e il bambino scopre gli spazi intermedi. Fra le pietre, fra le parti di muschio sulle pietre, fra le persone. E fra i numeri. Sai questo a cosa porta? Alle frazioni. I numeri interi più le frazioni danno i numeri razionali. Ma la coscienza non si ferma lì.** Vuole superare la ragione. Aggiunge un'operazione assurda come la radice quadrata. E ottiene i numeri irrazionali.»

«È una sorta di follia. Perché i numeri irrazionali sono infiniti. Non possono essere scritti. Spingono la coscienza nell'infinito. E addizionando i numeri irrazionali ai numeri razionali si ottengono i numeri reali.»

«Non finisce. Non finisce mai. È come un grande paesaggio aperto. Gli orizzonti. Ci si avvicina a essi e loro continuano a spostarsi.

La matematica è davvero una storia infinita. Scavi e scavi e trovi sempre qualcosa di nuovo.

