

LE VERITÀ NASCOSTE FRA  
NUMERI E OPERAZIONI  
**LA MOLTIPLICAZIONE**

Agorà 20/11/2013

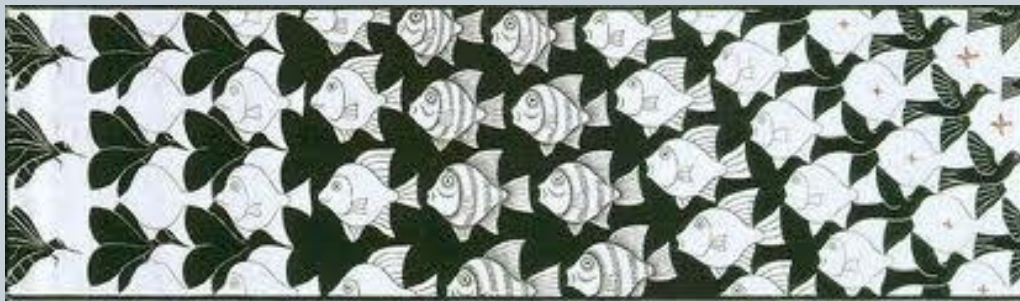
ANGELA BALESTRA

# PREMESSA

Se si chiede ad uno studente universitario che cosa è la moltiplicazione, riemerge la definizione della scuola primaria, l'unica ad aver lasciato un segno

Per un insegnante è importante conoscere l'evoluzione del concetto di moltiplicazione, come quella di qualsiasi altra operazione?

*Per una buona didattica è necessario un buon Sapere  
Martha Isabel Fandiño Pinilla*



# UN MODELLO DEL SAPERE

**Evoluzione del concetto di moltiplicazione**

**STUDENTE — DISCIPLINA — DIDATTICA**

**La trasposizione didattica ci deve spingere a far sì che lo studente si costruisca**

- **un'immagine della matematica con un modello stabile *stabile e forte*?**
- **una base per saperi o apprendimenti futuri?**

# LA QUESTIONE DEL «DEFINIRE»

- Nella storia è capitato spesso che i matematici si siano trovati a vivere momenti in cui hanno avuto dubbi e incertezze sui metodi che usavano o sulle ricerche che conducevano. La scoperta degli irrazionali in Grecia, degli infinitesimi nel Seicento ne sono un esempio.
- Trovandosi di fronte a problemi nuovi e avendo a disposizione strumenti inadeguati (non precisi o non determinati da regole) i matematici si confrontarono anche aspramente.
- Sono state percorse diverse strade che hanno portato a far incontrare la matematica non solo con le scienze sperimentali ma anche con la filosofia
- Dal 1870 circa al 1930, sono state sviluppate la teoria assiomatica degli insiemi e la logica.

# DALLA INTUIZIONE AL FORMALISMO

CON PAROLE CHE SI SONO SVUOTATE DI OGNI SIGNIFICATO INTUITIVO



**PEANO, Giuseppe**

*Arithmetices principia, nova methodo exposita.*, 1889.

- Contiene i celebri assiomi per i numeri naturali
- Utilizza per la prima volta un simbolismo logico per delineare i fondamenti della Aritmetica.

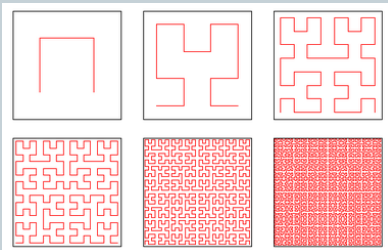
# UN MODELLO DI RIFERIMENTO



G. Peano 1858-1932

**Il suo intento era quello di sviluppare un sistema logico formale che fosse in grado di esprimere tutta la matematica, per cui egli può essere considerato un logicista puro.**

**Fu il primo a dare una veste assiomatica, formale, abbastanza rigorosa all'aritmetica**



La curva di Peano è continua ma la sua traiettoria decisamente non è unidimensionale.

# COS'È LA MOLTIPLICAZIONE IN N

## ASSIOMATICA DI PEANO

Termini primitivi

*Numero (sottinteso naturale), Zero, successivo*

**Definizione**

*Qualunque siano  $n, k \in N$  si pone*

$$n \bullet 0 = 0$$

$$n \bullet s(k) = n \bullet k + n$$

*Per esempio, se al valore  $k$  attribuiamo i valori 0,1,2,3 ....*

*Si ottiene*

$$\text{Per } k = 0 \text{ si ha } n \bullet 1 = n \bullet 0 + n = 0 + n = n$$

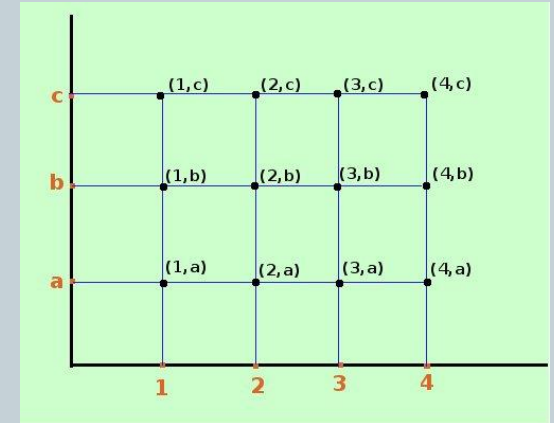
$$\text{Per } k = 1 \text{ si ha } n \bullet 2 = n \bullet 1 + n = n + n$$

$$\text{Per } k = 2 \text{ si ha } n \bullet 3 = n \bullet 2 + n = n + n + n$$

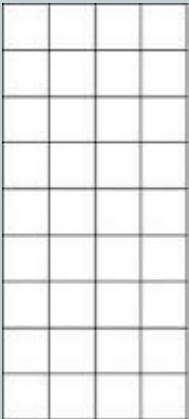
*Si ritrova ciò che si dice comunemente « la moltiplicazione è una addizione ripetuta »*

# COME SI RAPPRESENTA LA MOLTIPLICAZIONE IN N

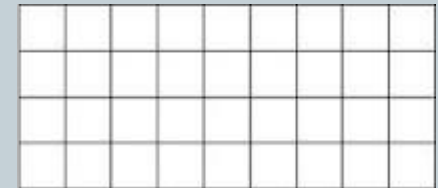
a)  $m \bullet n$  rappresenta la cardinalità dell'insieme *prodotto cartesiano* di due insiemi costituiti rispettivamente da  $m$  elementi e  $n$  elementi



b)  $m \bullet n$  ammette anche una semplice rappresentazione geometrica



Se, rispetto a una determinata unità  $u$ , la base misura  $n$  e l'altezza misura  $m$ , allora il rettangolo è formato da  $m \bullet n$  quadretti di lato  $u$



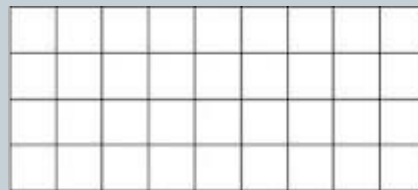
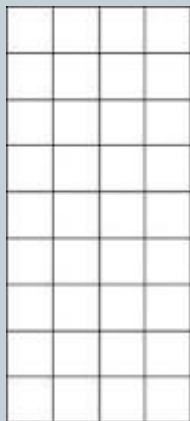


# QUALI INSIDIE NASCONDONO DEFINIZIONI E RAPPRESENTAZIONI?

- Le operazioni di moltiplicazione definite mediante il prodotto cartesiano e l'addizione ripetuta sono la stessa operazione?
- $m \bullet n : m + m + m + \dots$  Oppure  $n + n + n + n + \dots$  ?
- Resta del tutto da chiarire il problema di cosa significhi  $3 \bullet 1$  dato che non è possibile sommare 3 con se stesso una volta e così pure  $3 \bullet 0$

# QUALI INSIDIE NASCONDONO DEFINIZIONI E RAPPRESENTAZIONI?

Solo grazie ad una **biezione**, quella che scambia le componenti della coppia ordinata (una sorta di ‘movimento’ rigido), si può cogliere che i due insiemi, pur sostanzialmente diversi, hanno lo stesso numero cardinale e di qui giungere alla proprietà commutativa della moltiplicazione.



# E SE SI MOLTIPLICANO GRANDEZZE ?

In matematica e in fisica capita di moltiplicare grandezze

- CALCOLO DELL'AREA di una figura moltiplicando due misure di lunghezza
- CALCOLO DEL VOLUME moltiplicando una misura di superficie e una misura di lunghezza
- CALCOLO DELL'INTENSITA' DELLA FORZA PESO di un corpo sulla Terra moltiplicando la massa per la costante di proporzionalità

Queste <operazioni> meritano un approfondimento

- cos'è una <grandezza>?
- cosa si intende per <misura> di una grandezza?
- <calcolare l'area > e <misurare un'area> si equivalgono?
- <misurare> in matematica e <misurare> in fisica si equivalgono?

# E SE SI MOLTIPLICANO GRANDEZZE ?

Per iniziare

- Si dice classe di grandezze ogni insieme tale che due suoi qualunque elementi possono essere “confrontati” e “sommati”.
- Due grandezze della stessa classe si dicono omogenee.
- Il rapporto di grandezze di una stessa classe rispetto a una grandezza prefissata prende il nome di misura rispetto alla grandezza assunta come unitaria.

<http://dm.unife.it/matematicainsieme/>

# QUALI INSIDIE NASCONDONO DEFINIZIONI E RAPPRESENTAZIONI?

- La moltiplicazione come addizione ripetuta,

$$3 \bullet 2 \text{ e } 2 \bullet 3$$

sono uguali? Ma forniscono scritture diverse!

$$2+2+2 \text{ e } 3+3$$

- UN PROBLEMA DI LINGUAGGIO:

Se si vuole definire  $m \bullet n$  come l'iterazione dell'addizione di  $m$  con se stesso  $n$  volte si osserva che nella scrittura  $m \bullet n$  sono presenti i simboli  $m$  e  $n$  col ruolo di numeri, mentre nella frase «l'addizione di  $m$  con se stesso  $n$  volte» solo il simbolo  $m$  mantiene il ruolo di numero, mentre  $n$  è qui presente non più come numero ma come un aggettivo numerale cardinale (riferito a 'volte')

- Nel passaggio da  $N$  a  $Z$  a  $Q$  il prodotto è sempre maggiore di ciascun fattore?

# QUANDO SI AMPLIA N

- Nel passaggio da N a Z le motivazioni che erano coerenti in N ora perdono di significato

$$(-n) \bullet (-m) = ??$$

- Nel passaggio da Z a Q quali argomentazioni per spiegare il prodotto di due numeri espressi sotto forma di frazione o decimale?



# DEFINIRE LA MOLTIPLICAZIONE IN $\mathbb{Z}$

Estendiamo l'operazione di moltiplicazione al caso dei numeri negativi, definendo quanto segue: dato  $x$  numero naturale

$$(-1) \bullet x = -x$$

dove con  $-x$  si intende l'inverso additivo di  $x$  :

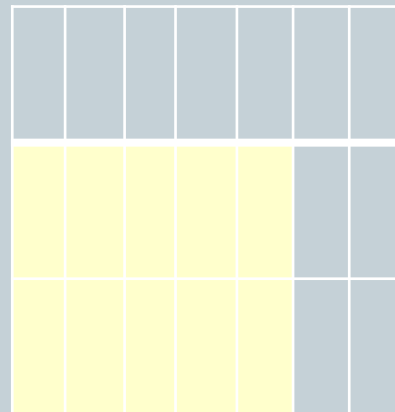
$$x + (-1) \bullet x = 0$$

- Da qui abbiamo che la moltiplicazione di interi qualunque si riduce alla moltiplicazione di interi positivi e di  $-1$ .
- Lo schema che ne deriva è detto *regola dei segni*
- Quest'ultima regola trova molteplici e *fantasiose* interpretazioni anche nella vita reale.

# MOLTIPLICAZIONE IN Q E R

- La definizione di moltiplicazione si può infine estendere all'insieme dei numeri razionali, ai numeri reali, e ai numeri complessi.
- Per i numeri razionali abbiamo

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$



$$2/3 \bullet 5/7$$



# LE PROPRIETÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE

|  | N  | Z  | Q  |
|--|----|----|----|
| <b>COMMUTATIVA</b><br>$a * b = b * a$  | SI | SI | SI |
| <b>ASSOCIATIVA</b><br>$(a * b) * c = a * (b * c)$  | SI | SI | SI |
| <b>ELEMENTO NEUTRO</b><br>$a * 1 = 1 * a = a$  | SI | SI | SI |
| <b>INVERSO</b><br>Per ogni $a \neq 0$<br>Esiste ed è unico<br>l'inverso $a^{-1}$ di $a$<br>$a^{-1} * a = a * a^{-1} = 1$ | NO | NO | SI |

**COLLEGAMENTO FRA ADDIZIONE E MOLTIPLICAZIONE**

**PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DELLA MOLTIPLICAZIONE RISPETTO ALL'ADDIZIONE**

# A COSA SERVONO LE PROPRIETÀ NELLA SCUOLA DEL 1° CICLO?



## CALCOLO VELOCE

- A) Moltiplicare per 9, 99, 999
- B) Moltiplicare per 11, 101, 1001
- C) Moltiplicare per 5, 50 ..
- D) Moltiplicare per 4

Anche i «calcoli» hanno il loro fascino

$1 \times 1 = 1$   
 $11 \times 11 = 121$   
 $111 \times 111 = 12321$   
 $1111 \times 1111 = 1234321$   
 $11111 \times 11111 = 123454321$

$1 \times 9 + 2 = 11$   
 $12 \times 9 + 3 = 111$   
 $123 \times 9 + 4 = 1111$   
 $1234 \times 9 + 5 = 11111$   
 $12345 \times 9 + 6 = 111111$   
 $123456 \times 9 + 7 = 1111111$   
 $1234567 \times 9 + 8 = 11111111$   
 $12345678 \times 9 + 9 = 111111111$

$9 \times 9 + 7 = 88$   
 $9 \times 98 + 6 = 888$   
 $9 \times 987 + 5 = 8888$   
 $9 \times 9876 + 4 = 88888$   
 $9 \times 98765 + 3 = 888888$   
 $9 \times 987654 + 2 = 8888888$   
 $9 \times 9876543 + 1 = 88888888$   
 $9 \times 98765432 + 0 = 888888888$

# MULTIPLI , DIVISORI E NUMERI PRIMI

- Perché se 0 è multiplo di tutti i numeri, il mcm non è sempre zero?
- Perché 1 non è un numero primo?
- La moltiplicazione ci aiuta a fare le divisioni?
- Più di uno sguardo a  $3 \bullet 4 = 12$   
( 12 è multiplo di 3, 12 è divisibile per 3 ....)

# DAL DEFINIRE ALL'APPLICARE

Come in ogni operazione, i calcoli diventano impossibili se ogni volta si è costretti a ricondursi alle definizioni e al significato 'intuitivo' o insiemistico delle operazioni aritmetiche.



# LA TAVOLA PITAGORICA

Si abbandona quindi l'intuizione e si ricorre alle *tavole pitagoriche* che con Pitagora hanno poco a che fare, poiché il filosofo greco non aveva a disposizione la *notazione posizionale*, che fa uso delle *cifre arabe*, introdotte in Europa agli inizi del XIII secolo (ma usate in modo incerto ancora per qualche secolo).

|   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 9 | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |
| 8 | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 7 | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 6 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 5 | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 4 | 0 | 4 | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 3 | 0 | 3 | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 2 | 0 | 2 | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 1 | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| . | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |

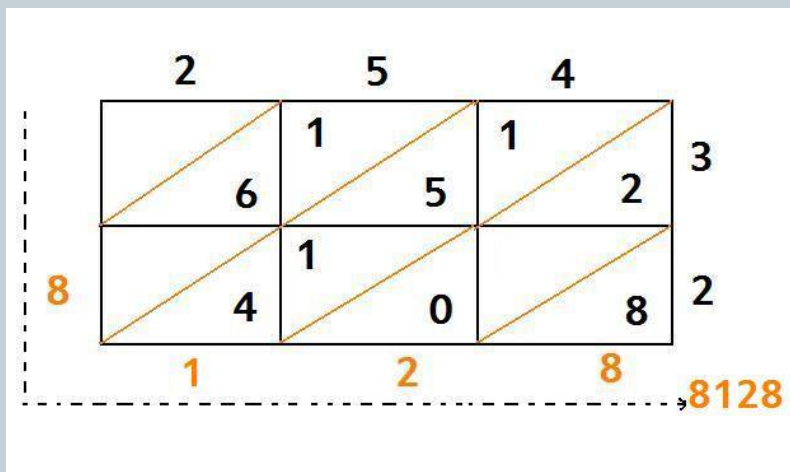
Quale orientamento ? Perché?

Oggi la paura dello zero è stata superata?

Qualche insidia: i multipli di 6 sono finiti?!!

# MOLTIPLICAZIONE GELOSIA

- Perché non si preferisce questo metodo?
- Quali sono le motivazioni di carattere didattico?



$$4u * 2u = 8u$$

$$4u * 3d = 12d = 1c + 2d$$

$$5d * 3d = 15c = 1m + 5c$$

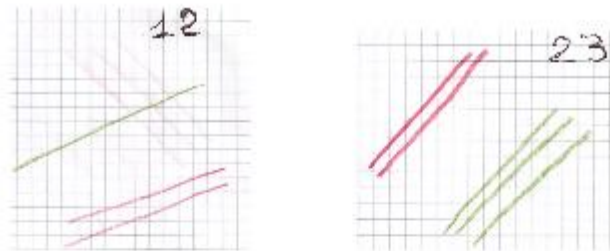
$$5d * 2u = 10d = 1c$$

$$2c * 3d = 6m$$

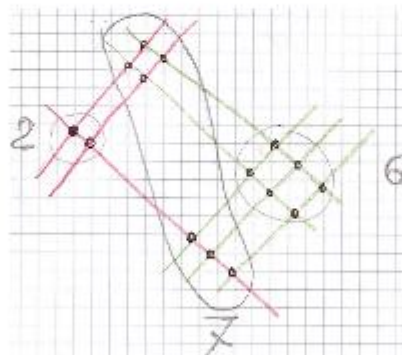
$$2c * 2u = 4c$$

# MOLTIPLICAZIONE «CINESE»

Si scrivono i numeri



Si fanno intersecare le linee e si addizionano i nodi secondo lo schema riportato.



Questo perché ogni linea rappresenta una DECINA o un UNITA'.  
I nodi rappresentano i prodotti delle decine e/o delle unità.  
Dopo aver individuato i nodi si sommano le centinaia (ottenute dal prodotto di decine), le decine (ottenute dal prodotto di unità e decine) e le unità (ottenute dal prodotto di unità), senza scordare eventuali riporti.

**Niente tabelline,  
solo addizioni!!**

# E ANCORA....

## Raddoppiando

Ad esempio  $125 * 13$

Si scrive uno dei due due numeri (125) su una colonna e si esegue il raddoppio. Si tiene nota a destra del fattore

|      |    |
|------|----|
| 125  | 1  |
| 250  | 2  |
| 500  | 4  |
| 750  | 8  |
| 1500 | 16 |

Nella colonna di destra si individuano (non univocamente) gli addendi che danno come somma 13, ad esempio  $1+4+8$ ; si sommano poi i corrispondenti valori di sinistra

$$125+500+750$$

$$125 \bullet 13 =$$

$$125 \bullet (1 + 4 + 8)$$

## COME MAI <FUNZIONA>?

Sono state applicate la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e la proprietà associativa della addizione



# I BASTONCINI DI NEPERO

| 1 | 3      | 7      | 6      |
|---|--------|--------|--------|
| 2 | 6      | 1<br>4 | 1<br>2 |
| 3 | 9      | 2<br>1 | 1<br>8 |
| 4 | 1<br>2 | 2<br>8 | 2<br>4 |
| 5 | 1<br>5 | 3<br>5 | 3<br>0 |
| 6 | 1<br>8 | 4<br>2 | 3<br>6 |
| 7 | 2<br>1 | 4<br>9 | 4<br>2 |
| 8 | 2<br>4 | 5<br>6 | 4<br>8 |
| 9 | 2<br>7 | 6<br>3 | 5<br>4 |

LA TABELLINA DEL 376 !

# MOLTIPLICAZIONE IN COLONNA

$$\begin{array}{r} 38 \times \\ 75 = \\ \hline 190 \\ 266 \phantom{0} \\ \hline 2.850 \end{array}$$

**SENZA REGOLE FORMALI NON E' COMPRENSIBILE  
L'OPERAZIONE IN COLONNA**

$38 = (3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0)$  e  $75 = (7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0)$ , quindi

$$\begin{aligned} 38 \times 75 &= && \text{(scritt. pos.)} \\ &= (3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) \times (7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0) = && \text{(distr. } \times \text{ su } +) \\ &= ((3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) \times (7 \cdot 10^1)) + ((3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) \times (5 \cdot 10^0)) = && \text{(distr. } \times \text{ su } +) \\ &= (((3 \cdot 10^1) \times (7 \cdot 10^1)) + ((8 \cdot 10^0) \times (7 \cdot 10^1))) + (((3 \cdot 10^1) \times (5 \cdot 10^0)) + ((8 \cdot 10^0) \times (5 \cdot 10^0))) = && \text{(comm } +) \\ &= (((8 \cdot 10^0) \times (5 \cdot 10^0)) + ((3 \cdot 10^1) \times (5 \cdot 10^0))) + (((8 \cdot 10^0) \times (7 \cdot 10^1)) + ((3 \cdot 10^1) \times (7 \cdot 10^1))) = && \text{(comm } \times) \\ &= (((5 \cdot 10^0) \times (8 \cdot 10^0)) + ((5 \cdot 10^0) \times (3 \cdot 10^1))) + (((7 \cdot 10^1) \times (8 \cdot 10^0)) + ((7 \cdot 10^1) \times (3 \cdot 10^1))) \end{aligned}$$

# LA PROVA DEL 9

$$\begin{array}{r} 3621 \times \\ 58 = \\ \hline 28968 \\ 18105 \\ \hline 210018 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$$

E' una prova che non dà certezze.

E' una **condizione necessaria ma non sufficiente**

Se avessi messo come risultato uno di questi numeri

453000 — 299001 — 30 — 39 — 2109 —...

il calcolo sarebbe stato sbagliato, contraddicendo la «prova»

*Ma quale caratteristica hanno questi numeri?*

**Divisi per 9 danno resto 3**

# COME MAI IL RESTO È UGUALE ALLA SOMMA DELLE SUE CIFRE?

**Proviamo a vedere cosa succede con le potenze di 10:**

*1 diviso per nove fa 0 con resto di 1;*

*10 diviso 9 fa 1 con resto di 1;*

*100 diviso 9 fa 11 con resto di 1;*

*e così via.*

*Quindi se riprendiamo il nostro 3621 e lo scriviamo come*

$$3 \bullet 1000 + 6 \bullet 100 + 2 \bullet 10 + 1$$

*scopriamo che il suo resto diviso per 9 è*

$$(3 \bullet 1000 + 6 \bullet 100 + 2 \bullet 10 + 1) : 9 =$$

$$3 \bullet 1000 : 9 = 9 \bullet 111 + 3$$

$$6 \bullet 100 : 9 = 9 \bullet 11 + 6$$

.....

# UN PO' DI ARITMETICA IN UN INSIEME FINITO

Sommando ripetutamente le cifre di un numero scritto nel nostro sistema di numerazione, fino a ridurlo ad un numero di una cifra soltanto, otteniamo il resto di quel numero nella sua divisione per 9 (eccezion fatta per i multipli di 9 per i quali otteniamo 9 anziché 0)

Ad esempio:

$$1538 = 9N + 1$$

$$9835 = 9N + 7$$

$$918 = 9N + 9$$

Nel nostro esempio

$$3621 \ 58 = 210018$$

Il risultato corretto potrebbe essere qualsiasi numero di questa forma:

$$9N + 3$$

|  |  |
|--|--|
| $\begin{array}{r} 3621 \times \\ 58 = \\ \hline 28968 \\ 18105 \\ \hline 210018 \end{array}$ | $\begin{array}{c c} 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$ |
|--|--|

# QUALI OPERAZIONI SI ESEGUONO NELL'APPLICARE LA PROVA DEL 9?

## Calcoliamo

- il resto della divisione per 9 del primo fattore e il resto della divisione per 9 del secondo fattore,
- Calcoliamo il resto della divisione per 9 del risultato
- Moltiplichiamo questi 2 numeri e otteniamo il resto della divisione per 9 che il risultato corretto deve avere.

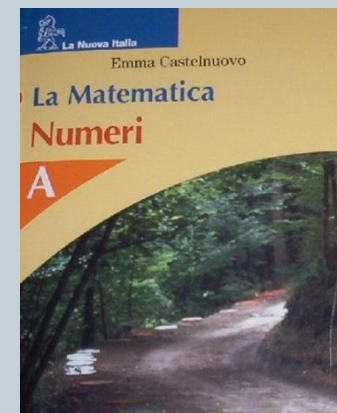
**Se questi 2 numeri sono diversi, la moltiplicazione è errata, mentre se i numeri sono uguali, la prova ci dice soltanto che hanno lo stesso resto nella divisione per 9**

$$\begin{array}{r} 3621 \times \\ 58 = \\ \hline 28968 \\ 18105 \\ \hline 210018 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$$

# INVITO ALLA LETTURA E A UNA VACANZA

- **Matematica nella realtà.**  
(Emma Castelnuovo e Mario Barra, 2000, Bollati Boringhieri)
- **Pentole, ombre, formiche. In viaggio con la matematica**  
(1993, La Nuova Italia)
- **Didattica della matematica**  
(1982, La Nuova Italia)
- **Laboratorio Casa Cenci - Amelia (Terni)**



Tutto ciò che non sappiamo è  
stupefacente. Ancor più  
stupefacente è quello che  
crediamo di sapere.

Philip Roth, *La macchia umana*, 2000